中国科学: 数学 评审中稿件

www.springerlink.com math.scichina.com

随机环境下上临界分支过程的非一致性 Berry-Esseen 估计

范协铨[①], 吴浩[①], 叶印娜[②]*

① 天津大学应用数学中心, 天津 300072;

② 西交利物浦大学理学院应用数学系, 苏州 215123

E-mail: fanxiequan@hotmail.com, wuhao_math@tju.edu.cn, yinna.ye@xjtlu.edu.cn

国家自然科学基金(批准号: 11971063) 资助项目

摘要 设 $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ 是一个独立同分布环境下的上临界分支过程. 本文得到了两个关于 $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ 的非一致性 Berry-Esseen 估计. 该结果把 Grama et al. [Stochastic Process. Appl., **127**(4), 1255-1281, 2017] 的 Berry-Esseen 估计推广到了非一致性的情形. 最后, 我们讨论了这些结果在区间估计方面的应用.

关键词 分支过程 随机环境 非一致性 Berry-Esseen 估计

MSC (2020) 主题分类 60J80，60K37，60F05，62E20

1 引言

随机环境下的分支过程最早由 Smith 和 Wilkinson [1] 引入, 它是 Galton-Watson 过程的一个推广. 记 $\xi=(\xi_0,\xi_1,\dots)$ 是一列独立同分布的随机变量, 其中 ξ_n 代表第 n 代的随机环境. 随机环境下的分支过程 $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ 有如下表达式:

$$Z_0=1,\ Z_{n+1}=\sum_{i=1}^{Z_n}X_{n,i},\ n\geqslant 0,$$

其中 $X_{n,i}$ 代表第 n 代第 i 个个体的后代数目. 随机变量 $X_{n,i}$ 的分布依赖于环境 ξ_n, 其分布律为 $p(\xi_n)=\{p_k(\xi_n)=\mathbb{P}(X_{n,i}=k|\xi_n):k\in\mathbb{N}\}$. 对给定的 ξ_n, $(X_{n,i})_{i\geqslant 1}$ 是一列独立同分布的随机变量; 而且 $(X_{n,i})_{i\geqslant 1}$ 与 $(Z_1,\dots,Z_n)$ 独立. 记 $(\Gamma,\mathbb{P}_\xi)$ 为随机环境 ξ 给定后的条件概率空间, 其中 $\mathbb{P}_\xi$ 通常称为淬火分布 (quenced law). 记 Θ 为随机环境 ξ 的状态空间, 则总的概率空间可以由乘积空间 $(\Theta^{\mathbb{N}}\times\Gamma,\mathbb{P})$ 来表示, 其中 $\mathbb{P}(dx,d\xi)=\mathbb{P}_\xi(dx)\tau(d\xi)$. 根据定义, 对于任意的定义在完全概率空间 $\Theta^{\mathbb{N}}\times\Gamma$ 上的非负可测函数 g, 我们有

$$\int g(x,\xi)\mathbb{P}(dx,d\xi)=\iint g(x,\xi)\mathbb{P}_\xi(dx)\tau(d\xi),$$

其中 τ 代表环境 ξ 的分布律. 通常称 $\mathbb{P}$ 为退火分布 (annealed law). 而 $\mathbb{P}_\xi$ 可以看成 $\mathbb{P}$ 在给定环境 ξ 下的条件概率. 我们用 $\mathbb{E}_\xi$ 和 $\mathbb{E}$ 分别表示概率 $\mathbb{P}_\xi$ 和 $\mathbb{P}$ 下的数学期望. 对给定的 ξ, 非负整数 $n\geqslant 0$ 和正实数 $p>0$, 定义

$$m_n^{(p)}=m_n^{(p)}(\xi)=\sum_{i=0}^{\infty}i^p p_i(\xi_n),\quad m_n=m_n(\xi)=m_n^{(1)}(\xi).$$

英文引用格式: Fan X, Wu H, Ye Y. Nonuniform Berry-Esseen bounds for a supercritical branching process in a random environment (in Chinese). Sci Sin Math, 2022, 45: 1–XX, doi: 10.1360/012011-XXX

则

$$m_0^{(p)} = \mathbb{E}_\xi Z_1^p \quad 且 \quad m_n = \mathbb{E}_\xi X_{n,i}, \quad i \geqslant 1.$$

考虑下面的随机变量

$$\Pi_0 = 1, \quad \Pi_n = \Pi_n(\xi) = \prod_{i=0}^{n-1} m_i, \quad n \geqslant 1.$$

容易验证

$$\mathbb{E}_\xi Z_{n+1} = \mathbb{E}_\xi \Big(\sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i} \Big) = \mathbb{E}_\xi \Big[\mathbb{E}_\xi \Big(\sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i} \Big| Z_n \Big) \Big] = \mathbb{E}_\xi \Big(\sum_{i=1}^{Z_n} m_n \Big) = m_n \mathbb{E}_\xi Z_n.$$

通过迭代, 我们有 $\Pi_n = \mathbb{E}_\xi Z_n$. 记

$$X = \log m_0, \quad \mu = \mathbb{E}X, \quad \sigma^2 = \mathbb{E}(X-\mu)^2.$$

根据参数 $\mu < 0$, $\mu = 0$ 或 $\mu > 0$ 的不同, 随机环境下的分支过程 $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ 分别被称为下临界的, 临界的或上临界的. 因此, μ 也被称为关键参数.

随机环境下的上临界分支过程的极限理论在过去的十多年间吸引了很多学者的研究, 见 Böinghoff [2], Li et al. [3], Wang 和 Liu [4], Fan et al. [5], Böinghoff 和 Kersting [6], Huang 和 Liu [7] 以及 Xu [8]. 特别地, Grama et al. [9] 得到了以下 Berry-Esseen 估计（见 [9] 中的定理 1.1）. 假设 $p_0(\xi_0) = 0$ 几乎处处成立, 且存在两个常数 $p > 1$ 和 $\delta \in (0,1]$ 使得 $\mathbb{E}X^{2+\delta} < \infty$ 和 $\mathbb{E}\left(\frac{Z_1}{m_0}\right)^p < \infty$ 成立. 则有下列关于 $\log Z_n$ 的 Berry-Esseen 估计成立

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x \right) - \Phi(x) \right| \leqslant \frac{C}{n^{\delta/2}}, \tag{1.1}$$

其中 C 是个正的常数. 当 $\delta = 1$ 时, 常数 C 的渐近精确值由 Gao [10] 给出.

本文的主要目的是建立关于 $\log Z_n$ 的非一致性 Berry-Esseen 估计. 虽然人们对独立随机变量之和的非一致性 Berry-Esseen 估计已经有了非常深入的研究, 参考 Bikelis [11] 及 Chen 和 Shao [12] 的工作, 但是到目前为止还未有随机环境下分支过程的非一致性 Berry-Esseen 估计. 这篇文章的目标既是补充这方面的空白. 我们得到了以下结果: 对所有的 $x \in \mathbb{R}$ 以及 $\delta' \in (0,\delta)$, 下式成立

$$\left| \mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x \right) - \Phi(x) \right| \leqslant C \frac{1}{n^{\delta/2}} \frac{1}{1+|x|^{1+\delta'}}.$$

根据 (2.1), 随机变量 $\log Z_n$ 只有有限的 $1+\delta'$ 阶矩, 所以当 $|x| \to \infty$ 时上述的非一致性 Berry-Esseen 估计是以 $|x|^{-1-\delta'}$ 的速度衰减的, 而不是$|x|^{-2-\delta}$ 的速度衰减. 显然, 因为增加了代数衰减的因子, 上面的非一致性 Berry-Esseen 估计比 (1.1) 的结果更加精确. 此外, 当 X 具有矩母函数且 $\mathbb{E}\frac{Z_1^p}{m_0} < \infty$ 时, 我们还得到了带有指数衰减速率的非一致性 Berry-Esseen 估计; 见本文的定理 2.

本文章的结构安排如下. 在第二节, 我们给出本文的主要结果. 在第三节和第四节, 我们分别给出主要结果的一些应用和证明. 在本文中, C 或 c 都是代表正的常数, 而C_K 代表依赖于 K 的正数, 且它们的确切值可随所在位置的不同而变化.

2 主要结果

在本文中, 记 $X_i = \log m_i,\ i \geqslant 0$. 显然, $(X_i)_{i\geqslant 0}$ 是一列独立同分布的随机变量且仅依赖于环境 ξ. 设 $(S_n)_{n\geqslant 0}$ 为随机环境下分支过程所对应的随机游动, 其定义如下:

$$S_0 = 0, \quad S_n = \log \Pi_n = \sum_{i=0}^{n-1} X_i, \quad n \geqslant 1.$$

则可对 $\log Z_n$ 进行如下分解

$$\log Z_n = S_n + \log W_n, \tag{2.1}$$

其中 $W_n = \frac{Z_n}{\Pi_n}$. 注意到无论是在测度 $\mathbb{P}$ 还是测度 $\mathbb{P}_\xi$ 下, W_n 都是关于如下定义的 $\sigma-$ 代数流 $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 的非负鞅,

$$\mathscr{F}_0 = \sigma\{\xi\}, \ \mathscr{F}_n = \sigma\left\{\xi, X_{k,i}, 0 \leqslant k \leqslant n-1, i \geqslant 1\right\}, \ n \geqslant 1.$$

根据 Doob 鞅收敛定理和 Fatou 引理, W_n 的极限存在, 记作 W, 且 W 满足 $\mathbb{E}W \leqslant 1$. 本文通篇假设以下条件: $Z_1 \geqslant 1$ 几乎处处成立，

$$\sigma \in (0, \infty) \quad 且 \quad \mathbb{E}\frac{Z_1}{m_0} \log^+ Z_1 < \infty. \tag{2.2}$$

上述条件足以保证 $\mu > 0$,

$$\mathbb{P}(W > 0) = \mathbb{P}\left(Z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty\right) = 1$$

且 W_n 依 $\mathbb{L}^1(\mathbb{P})$ 收敛到 W, 详见 Tanny [13].

记 $\log^+ x = \max\{\log x,\ 0\}$. 考虑以下两个条件：

(A1) 存在常数 $\delta \in (0, 1]$ 使得

$$\mathbb{E}X^{2+\delta} = \mathbb{E}\left(\log m_0\right)^{2+\delta} < \infty.$$

(A2) 存在常数 $p > 1$ 使得

$$\mathbb{E}\left(\frac{m_0^{(p)}}{m_0^p}\right) < \infty.$$

在上述条件下, 我们得到了以下带有代数衰减速率的非一致性 Berry-Esseen 估计.

定理 1 假设条件 **(A1)** 和 **(A2)** 成立. 则对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 以及 $\delta' \in (0, \delta)$,

$$\left|\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x\right) - \Phi(x)\right| \leqslant C \frac{1}{n^{\delta/2}} \frac{1}{1 + |x|^{1+\delta'}}. \tag{2.3}$$

显然，我们的结果不仅蕴含着 Grama et al. [9] 的 Berry-Esseen 估计(见 [9] 中的定理 1.1). 而且, 通过增加一个代数衰减的因子 $\frac{1}{1+|x|^{1+\delta'}}$, 改进了 Grama et al. [9] 的结果.

记

$$d_w(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\mathbb{P}\left(X \leqslant x\right) - \Phi(x)\right| dx$$

为随机变量 X 和标准正态随机变量的 Wasserstein-1 距离. 则定理 1 蕴含以下推论. 该推论给出了 Wasserstein-1 距离下, $\left(\log Z_n - n\mu\right)/\sigma\sqrt{n}$ 收敛到标准正态随机变量的速率.

推论 1 在定理 1 的条件下, 下式成立

$$d_w\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \leqslant \frac{C}{n^{\delta/2}}.$$

接下来, 我们考虑以下比 **(A1)** 和 **(A2)** 更强的条件:

(A3) 存在常数 $\lambda_0 > 0$ 使得

$$\mathbb{E}e^{\lambda_0 X} = \mathbb{E}m_0^{\lambda_0} < \infty.$$

(A4) 存在常数 $p > 1$ 使得

$$\mathbb{E}\left(\frac{Z_1^p}{m_0}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{m_0^{(p)}}{m_0}\right) < \infty.$$

在条件 **(A3)** 和 **(A4)** 下, 我们有以下带有指数衰减速率的非一致性 Berry-Esseen 估计. 此结果类似于Fan et al. [14] 关于鞅的非一致性 Berry-Esseen 估计.

定理 2 假设条件 **(A3)** 和 **(A4)** 成立. 则对任意的 $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x\right) - \Phi(x)\right| \leqslant C\frac{1}{\sqrt{n}}(1+x^2)\exp\left\{-\frac{\hat{x}^2}{2}\right\}, \tag{2.4}$$

其中

$$\hat{x} = \frac{|x|}{\sqrt{1+c|x|/\sqrt{n}}}.$$

在文章 [9] 中, Grama 等人在条件 **(A3)** 和 **(A4)** 下得到了 Cramér 型中偏差. 与 Grama 等人的结果相比, (2.4) 式的优势在于它对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 成立而不局限于 x 需满足 $0 \leqslant |x| = o(\sqrt{n})$ 的情况.

3 区间估计上的应用

3.1 μ 的置信区间

若 σ 已知, 则定理 1 可以用于构造 μ 的置信区间.

定理 3 假设定理 1 的条件成立. 设 $\kappa_n \in (0,1)$, 且满足

$$|\log \kappa_n| = o(\log n), \quad n \to \infty. \tag{3.1}$$

则对充分大的 n, $[A_n, B_n]$ 是 μ 的置信水平为 $1-\kappa_n$ 的置信区间, 其中

$$A_n = \frac{\log Z_n}{n} - \frac{\sigma\Phi^{-1}\left(1-\frac{\kappa_n}{2}\right)}{\sqrt{n}}, \qquad B_n = \frac{\log Z_n}{n} + \frac{\sigma\Phi^{-1}\left(1-\frac{\kappa_n}{2}\right)}{\sqrt{n}}.$$

证明 根据定理 1, 下面的式子

$$\frac{\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \geqslant x\right)}{1-\Phi(x)} = 1 + o(1) \quad \text{与} \quad \frac{\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant -x\right)}{\Phi(-x)} = 1 + o(1) \tag{3.2}$$

在 $0 \leqslant x = o\left(\sqrt{\log n}\right)$ 上一致成立. 当 $p \searrow 0$, 标准正态分布的分位数具有以下展式

$$\Phi^{-1}(p) = -\sqrt{\log\frac{1}{p^2} - \log\log\frac{1}{p^2} - \log(2\pi)} + o(1).$$

特别地, 当 κ_n 满足条件 (3.1) 时, 标准正态分布的 $(1-\kappa_n/2)$-分位数满足 $\Phi^{-1}(1-\kappa_n/2) = -\Phi^{-1}(\kappa_n/2) = O(\sqrt{|\log\kappa_n|})$, 且它是 $\sqrt{\log n}$ 的无穷小量. 根据 (3.2) 式, 当 $n\to\infty$ 时, 以下两个式子成立

$$\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > \Phi^{-1}\left(1-\frac{\kappa_n}{2}\right)\right) \sim \frac{\kappa_n}{2},$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < -\Phi^{-1}\left(1-\frac{\kappa_n}{2}\right)\right) \sim \frac{\kappa_n}{2}.$$

因此, 当 $n\to\infty$ 时,

$$\mathbb{P}\left(-\Phi^{-1}\left(1-\frac{\kappa_n}{2}\right) \leqslant \frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant \Phi^{-1}\left(1-\frac{\kappa_n}{2}\right)\right) \sim 1-\kappa_n. \tag{3.3}$$

上式表明当 n 足够大时, $[A_n, B_n]$ 是 μ 的置信水平为 $1-\kappa_n$ 的置信区间. □

3.2 Z_n 的置信区间

若参数 μ 与 σ 都已知, 我们可以运用定理 1 和 2 来构造 Z_n 的置信区间. 这类置信区间可以用于预测人口数 Z_n.

定理 4 设 $\kappa_n\in(0,1)$. 考虑下面 **(B1)** 与 **(B2)** 两组条件:

(B1) 定理 1 的条件成立且

$$|\log\kappa_n| = o(\log n), \quad n\to\infty. \tag{3.4}$$

(B2) 定理 2 的条件成立且

$$|\log\kappa_n| = o(n^{1/3}), \quad n\to\infty. \tag{3.5}$$

如果条件 **(B1)** 或 **(B2)** 满足, 则对足够大的 n, $[A_n, B_n]$ 是 Z_n 的置信水平为 $1-\kappa_n$ 的置信区间, 其中

$$A_n = \exp\left\{n\mu - \sigma\sqrt{n}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\kappa_n}{2}\right)\right\}, \qquad B_n = \exp\left\{n\mu + \sigma\sqrt{n}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\kappa_n}{2}\right)\right\}.$$

证明 假设条件 **(B1)** 满足. 根据定理 1 和 (3.3), 我们有：当 $n\to\infty$ 时,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(-\Phi^{-1}\left(1-\frac{\kappa_n}{2}\right) \leqslant \frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant \Phi^{-1}\left(1-\frac{\kappa_n}{2}\right)\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\exp\left\{n\mu - \sigma\sqrt{n}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\kappa_n}{2}\right)\right\} \leqslant Z_n \leqslant \exp\left\{n\mu + \sigma\sqrt{n}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\kappa_n}{2}\right)\right\}\right) \sim 1-\kappa_n.\end{aligned}$$

由上式可见, 当 n 足够大时, $[A_n, B_n]$ 是 Z_n 的置信水平为 $1-\kappa_n$ 的置信区间.

现在, 假设条件 **(B2)** 满足. 根据定理 2, 我们有

$$\frac{\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \geqslant x\right)}{1-\Phi(x)} = 1+o(1) \quad 与 \quad \frac{\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant -x\right)}{\Phi(-x)} = 1+o(1) \tag{3.6}$$

在 $0 \leqslant x = o(n^{1/6})$, $n \to \infty$, 上一致成立. 当 κ_n 满足条件 (3.5) 时, 标准正态分布的 $(1-\kappa_n/2)$-分位数满足 $\Phi^{-1}(1-\kappa_n/2) = -\Phi^{-1}(\kappa_n/2) = O(\sqrt{|\log \kappa_n|})$, 且它是 $n^{1/6}$ 的无穷小量. 然后, 根据 (3.6), 我们有

$$\mathbb{P}\Big(-\Phi^{-1}\left(1-\tfrac{\kappa_n}{2}\right) \leqslant \tfrac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant \Phi^{-1}\left(1-\tfrac{\kappa_n}{2}\right)\Big) \sim 1-\kappa_n.$$

由上式可见, 结论仍然成立. □

4 主要结果的证明

4.1 定理 1 的准备引理

关于独立随机变量之和, Bikelis [11] 给出了以下非一致性 Berry-Esseen 估计.

引理 1 设 $Y_1, \ldots, Y_n$ 是相互独立的随机变量, 且满足

$$\mathbb{E}Y_i = 0 \quad 与 \quad \mathbb{E}|Y_i|^{2+\delta} < \infty, \quad i = 1, \ldots, n,$$

其中常数 $\delta \in (0,1]$. 假设 $\sum_{i=1}^n \mathbb{E}Y_i^2 = 1$. 则对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 下式成立

$$\left|\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n Y_i \leqslant x\right) - \Phi(x)\right| \leqslant \frac{C}{1+|x|^{2+\delta}} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}|Y_i|^{2+\delta}.$$

考虑 W 分别在 $\mathbb{P}_\xi$ 和 $\mathbb{P}$ 下的拉普拉斯变换, 即对任意的 $t > 0$,

$$\phi_\xi(t) = \mathbb{E}_\xi e^{-tW} \quad 和 \quad \phi(t) = \mathbb{E}\phi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{-tW}.$$

我们有下面的估计.

引理 2 假设条件 **(A1)** 和 **(A2)** 成立. 则对任意的 $t > 0$,

$$\phi(t) \leqslant \frac{C}{1+(\log^+ t)^{1+\delta}}.$$

证明 引入位移运算符 T^n, 即 $T^n(\xi_0, \xi_1, \ldots) = (\xi_n, \xi_{n+1}, \ldots)$, $n \geqslant 1$. 对给定的 $k \geqslant 0$, 记

$$\Pi_n\left(T^k\xi\right) = m_k \cdots m_{k+n-1}.$$

特别地, 我们有 $\Pi_n = \Pi_n\left(T^0\xi\right)$. 接下来, 我们借鉴 Grama et al. [15] 的方法. 由 [15] 中的 (3.15), 可证明对任意的 $t > 0$ 和 $n \geqslant 1$, 有

$$\phi(t) \leqslant \mathbb{E}\phi\left(\frac{t}{\Pi_n}\right) \prod_{j=0}^{n-1} \left(p_1(\xi_j) + (1-p_1(\xi_j))\beta_K\right) + \frac{1}{K}\mathbb{E}\left[\phi_{T^n\xi}\left(\frac{t}{\Pi_n}\right)\mathbb{E}_{T^n\xi}W^p\right] + \mathbb{P}\left(\frac{t}{\Pi_n} < t_K\right), \qquad (4.1)$$

其中 $t_K = (CK)^{-1/(p-1)}$, C 和 K 都是正数且满足下式

$$\beta_K := 1 - (1-1/p)t_K \in (0,1).$$

再由 [15] 中的 (3.18), 有

$$\mathbb{E}\left[\phi_{T^n\xi}\left(\frac{t}{\Pi_n}\right)\mathbb{E}_{T^n\xi}W^p\right] \leqslant \mathbb{E}\phi\left(\frac{t}{\Pi_n}\right) + \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}\frac{\phi\left(t/\Pi_{k+1}(T^n\xi)\Pi_n(\xi)\right)}{\Pi_k^{p-1}(T^n\xi)}\frac{m_k^{(p)}(T^n\xi)}{m_k^p(T^n\xi)}. \tag{4.2}$$

设 $p \in (1,2]$. 对给定的 (n,K), $\tilde{Y}_{n,K}$ 是一个取值为正的随机变量, 其分布定义如下: 对于任意有界可测函数 g,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}g(\tilde{Y}_{n,K}) &= \frac{1}{q_{n,K}}\left[\mathbb{E}g\left(\frac{1}{\Pi_n}\right)\prod_{j=0}^{n-1}(p_1(\xi_j)+(1-p_1(\xi_j))\beta_K)\right.\\ &\quad\left.+\frac{1}{K}\mathbb{E}g\left(\frac{1}{\Pi_n}\right)+\frac{1}{K}\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}\frac{g\left(\frac{1}{\Pi_{k+1}(T^n\xi)\Pi_n(\xi)}\right)}{\Pi_k^{p-1}(T^n\xi)}\frac{m_k^{(p)}(T^n\xi)}{m_k^p(T^n\xi)}\right],\end{aligned} \tag{4.3}$$

其中 $q_{n,K}$ 是归一化常数(使得当 $g=1$ 时, $\mathbb{E}g(\tilde{Y}_{n,K})=1$), 其表达式如下:

$$\begin{aligned}q_{n,K} &= \mathbb{E}\prod_{j=0}^{n-1}(p_1(\xi_j)+(1-p_1(\xi_j))\beta_K)+\frac{1}{K}\left[1+\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}\frac{1}{\Pi_k^{p-1}(T^n\xi)}\frac{m_k^{(p)}(T^n\xi)}{m_k^p(T^n\xi)}\right]\\ &= \left[\mathbb{E}\left(p_1(\xi_0)+(1-p_1(\xi_0))\beta_K\right)\right]^n+\frac{1}{K}\left[1+\frac{1}{1-\mathbb{E}m_0^{-(p-1)}}\mathbb{E}\left(\frac{m_0^{(p)}}{m_0^p}\right)\right].\end{aligned} \tag{4.4}$$

上式来自 [15] 中的 (3.21). 综合 (4.1)-(4.3), 可得

$$\phi(t) \leqslant q_{n,K}\mathbb{E}\phi(\tilde{Y}_{n,K}\,t)+\mathbb{P}\left(\frac{t}{\Pi_n}<t_K\right). \tag{4.5}$$

选择常数 A 满足 $\log A > \mu$, 故有 $A>1$. 当 $A^{n+1}\leqslant t<A^{n+2}$ 时取 $K=K_n=((n+1)\log A)^{1+\delta}$, 则有 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{t_{K_n}}=1$, 且, 由 Nageav 不等式 (见 [16] 中的推论 2.5), 当 n 足够大时有

$$\mathbb{P}\left(\frac{t}{\Pi_n}<t_{K_n}\right)=\mathbb{P}\left(\Pi_n>\frac{t}{t_{K_n}}\right)\leqslant\mathbb{P}\left(S_n-n\mu>n(\log\frac{A}{\sqrt[n]{t_{K_n}}}-\mu)\right)\leqslant\frac{C}{n^{1+\delta}}. \tag{4.6}$$

当 $t\geqslant A^2$ 时, 设正整数 n 满足 $A^{n+1}\leqslant t<A^{n+2}$, 则

$$n>\frac{\log t}{\log A}-2.$$

那么由 (4.6), 对任意的 $A^{n+1}\leqslant t<A^{n+2}$, 有

$$\mathbb{P}\left(\frac{t}{\Pi_n}<t_{K_n}\right)\leqslant\frac{C}{n^{1+\delta}}<C\left(\frac{\log t}{\log A}-2\right)^{-1-\delta}\leqslant\frac{C}{(\log t)^{1+\delta}}. \tag{4.7}$$

注意到 $0\leqslant\phi(t)\leqslant1$ $(t>0)$. 所以由 (4.5) 和 (4.7), 有

$$\phi(t) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}q_{n,K_n}\mathbf{1}_{\{A^{n+1}\leqslant t<A^{n+2}\}}+\frac{C}{1+(\log^+t)^{1+\delta}}. \tag{4.8}$$

由 $q_{n,K}$ 的定义 (4.4) 知当 $A^{n+1}\leqslant t<A^{n+2}$ 时,

$$q_{n,K_n} \leqslant \frac{C}{1+(\log^+t)^{1+\delta}}. \tag{4.9}$$

最后, 由 (4.8) 和 (4.9) 可得: 对任意的 $t>0$,

$$\phi(t)\leqslant \frac{C}{1+(\log^{+} t)^{1+\delta}}.$$

引理 2 证毕. □

引理 3 假设条件 **(A1)** 和 **(A2)** 成立. 则对任意的 $q\in(1,\ 1+\delta)$, 下面两个不等式成立

$$\mathbb{E}|\log W|^{q}<\infty \tag{4.10}$$

和

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}|\log W_n|^{q}<\infty. \tag{4.11}$$

证明 考虑关于 $\mathbb{E}|\log W|^{q}$ 的截断分解式

$$\mathbb{E}|\log W|^{q}=\mathbb{E}|\log W|^{q}\mathbf{1}_{\{W>1\}}+\mathbb{E}|\log W|^{q}\mathbf{1}_{\{W\leqslant 1\}}. \tag{4.12}$$

对于上述等式右边的第一项, 有

$$\mathbb{E}|\log W|^{q}\mathbf{1}_{\{W>1\}}\leqslant C\,\mathbb{E}W<\infty. \tag{4.13}$$

对于第二项, 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|\log W|^{q}\mathbf{1}_{\{W\leqslant 1\}} &= q\int_{1}^{\infty}\frac{1}{t}(\log t)^{q-1}\mathbb{P}(W\leqslant t^{-1})\,dt\\ &\leqslant q\,e\int_{1}^{\infty}\frac{\phi(t)}{t}(\log t)^{q-1}\,dt\\ &= q\,e\left(\int_{1}^{e}\frac{\phi(t)}{t}(\log t)^{q-1}\,dt+\int_{e}^{\infty}\frac{\phi(t)}{t}(\log t)^{q-1}\,dt\right).\end{aligned} \tag{4.14}$$

上式中的不等式利用了 Markov 不等式, 即有

$$\mathbb{P}(W\leqslant t^{-1})\leqslant e\,\mathbb{E}e^{-tW}=e\,\phi(t).$$

显然:

$$\int_{1}^{e}\frac{\phi(t)}{t}(\log t)^{q-1}\,dt<\infty. \tag{4.15}$$

由引理 2 以及 $q<1+\delta$, 我们有

$$\int_{e}^{\infty}\frac{\phi(t)}{t}(\log t)^{q-1}\,dt\leqslant C\int_{e}^{\infty}\frac{1}{t(\log t)^{2+\delta-q}}\,dt<\infty. \tag{4.16}$$

将 (4.15) 和 (4.16) 代入 (4.14), 可得

$$\mathbb{E}|\log W|^{q}\mathbf{1}_{\{W\leqslant 1\}}<\infty. \tag{4.17}$$

因此, 由 (4.12), (4.13) 以及 (4.17), (4.10) 得证.

下面证明 (4.11). 由于函数 $x\mapsto\left|\log^{q}(x)\mathbf{1}_{\{x\leqslant 1\}}\right|$, $q>1$, 是非负凸的以及根据 [7] 中的引理 2.1, 我们有

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}\left|\log W_n\right|^{q}\mathbf{1}_{\{W_n\leqslant 1\}}=\mathbb{E}\left|\log W\right|^{q}\mathbf{1}_{\{W\leqslant 1\}}.$$

通过类似于 $\mathbb{E}\,|\log W|^q$ 的截断方式并由 (4.17) 可得

$$\begin{aligned}\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\,|\log W_n|^q &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\mathbb{E}\,|\log W_n|^q\,\mathbf{1}_{\{W_n>1\}} + \mathbb{E}\,|\log W_n|^q\,\mathbf{1}_{\{W_n\leqslant 1\}}\right)\\ &\leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\,|\log W_n|^q\,\mathbf{1}_{\{W_n>1\}} + \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\,|\log W_n|^q\,\mathbf{1}_{\{W_n\leqslant 1\}}\\ &\leqslant C\,\mathbb{E}W + \mathbb{E}\,|\log W|^q\,\mathbf{1}_{\{W\leqslant 1\}} < \infty.\end{aligned}$$

引理 3 得证. □

以下引理引用自 [9] 中的引理 2.4，其证明可参考 [9].

引理 4 假设条件 **(A1)** 和 **(A2)** 成立. 则存在常数 $\gamma\in(0,1)$ 使得对任意的 $n\geqslant 0$, 下式成立

$$\mathbb{E}|\log W_n - \log W| \leqslant C\,\gamma^n.$$

在定理 1 的证明中, 下面的引理起着关键作用.

引理 5 假设条件 **(A1)** 和 **(A2)** 成立. 则对任意的 $x\in\mathbb{R}$ 以及 $\delta'\in(0,\delta)$, 下面两个不等式成立

$$\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x, \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \geqslant x\right) \leqslant C\frac{1}{n^{\delta/2}}\frac{1}{1+|x|^{1+\delta'}} \tag{4.18}$$

和

$$\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \geqslant x, \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x\right) \leqslant C\frac{1}{n^{\delta/2}}\frac{1}{1+|x|^{1+\delta'}}. \tag{4.19}$$

证明 由于 (4.19) 的证明方法与 (4.18) 的类似, 我们仅证明 (4.18). 当 $x>\frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}$, 我们有

$$\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x, \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \geqslant x\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \geqslant x\right).$$

根据引理 1, 当 $x>\frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}$, 不等式 (4.18) 显然成立. 当 $x<-\frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}$, 根据 $Z_n\geqslant 1$ 几乎处处成立, 我们有

$$\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \geqslant -\frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}.$$

所以对任意的 $x<-\frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x, \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \geqslant x\right) = 0.$$

即不等式 (4.18) 对任意的 $|x|>\frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}$ 成立.

接下来，我们证明对任意的 $|x|\leqslant\frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}$, 不等式 (4.18) 成立. 定义

$$Y_{m,n} = \sum_{i=m+1}^{n}\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}},\quad Y_n = Y_{0,n},\quad V_m = \frac{\log W_m}{\sigma\sqrt{n}},\quad D_{m,n} = V_n - V_m.$$

令 $\alpha_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ 和 $m=[\sqrt{n}]$, 其中 $[t]$ 表示不超过 t 的最大整数. 由 (2.1) 可得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x, \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \geqslant x\right) \leqslant\ & \mathbb{P}\left(Y_n + V_m \leqslant x+\alpha_n, Y_n\geqslant x\right)\\ &+\mathbb{P}\left(|D_{m,n}|>\alpha_n\right).\end{aligned} \tag{4.20}$$

对于不等式 (4.20) 右边的第二项, 利用 Markov 不等式和引理 4, 可得存在一个常数 $\gamma \in (0,1)$, 使得对任意的 $|x| \leqslant \frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}$,

$$\mathbb{P}\left(|D_{m,n}| > \alpha_n\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\,|D_{m,n}|}{\alpha_n} = \frac{\sqrt{n}\mathbb{E}\,|\log W_n - \log W_m|}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant C\gamma^m \leqslant C\frac{1}{n^{\delta/2}}\frac{1}{1+|x|^{2+\delta}}. \tag{4.21}$$

上述最后一个不等式成立的原因是 $n^{\delta/2}(1+n^{(2+\delta)/2})\gamma^m = o(1)$, $n\to\infty$. 对于不等式 (4.20) 右边的第一项, 我们将运用分解的方法来控制它. 令

$$G_{m,n}(x) = \mathbb{P}\left(Y_{m,n} \leqslant x\right), \ G_n(x) = \mathbb{P}\left(Y_n \leqslant x\right) \quad 和 \quad v_m(ds,dt) = \mathbb{P}\left(Y_m \in ds, V_m \in dt\right).$$

由于 $Y_{m,n}$ 和 (Y_m, V_m) 是相互独立的, 我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(Y_n + V_m \leqslant x + \alpha_n, Y_n \geqslant x\right)\\
&= \mathbb{P}\left(Y_{m,n} + Y_m + V_m \leqslant x + \alpha_n, Y_{m,n} + Y_m \geqslant x\right)\\
&= \iint \mathbb{P}\left(Y_{m,n} + s + t \leqslant x + \alpha_n, Y_{m,n} + s \geqslant x\right) v_m(ds,dt)\\
&= \iint \mathbf{1}_{\{t\leqslant\alpha_n\}}\left(G_{m,n}\left(x - s - t + \alpha_n\right) - G_{m,n}(x-s)\right) v_m(ds,dt).
\end{aligned} \tag{4.22}$$

注意到 $(X_i)_{i\geqslant1}$ 是独立同分布的随机变量序列, 因此 $\sum_{i=m+1}^{n} X_i$ 和 $\sum_{i=1}^{n-m} X_i$ 同分布. 于是, 我们可以得到

$$\begin{aligned}
G_{m,n}(x) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=m+1}^{n}\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x\right) &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n-m}\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n-m}} \leqslant \frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{n-m}}\right)\\
&= G_{n-m}\left(\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{n-m}}\right) = G_{n-m}\left(x\left(1+R_n\right)\right),
\end{aligned} \tag{4.23}$$

其中

$$R_n = \sqrt{\frac{n}{n-m}} - 1$$

且 $0 \leqslant R_n \leqslant \frac{C}{\sqrt{n}}$. 利用微分中值定理, 对任意的 $x\in\mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned}
\left|\Phi\left(x\left(1+R_n\right)\right) - \Phi(x)\right| &\leqslant R_n\left|x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}\right| \leqslant C\frac{1}{\sqrt{n}}\left|x\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}\right|\\
&\leqslant C\frac{1}{n^{\delta/2}}\frac{1}{1+|x|^{2+\delta}}.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

由引理 1 可以推出

$$\begin{aligned}
\left|G_{n-m}\left(x\left(1+R_n\right)\right) - \Phi\left(x\left(1+R_n\right)\right)\right| &= \left|\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n-m}\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n-m}} \leqslant \frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{n-m}}\right) - \Phi\left(\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{n-m}}\right)\right|\\
&\leqslant C\frac{1}{(n-m)^{\delta/2}}\frac{1}{1+\left|x\left(1+R_n\right)\right|^{2+\delta}}\\
&\leqslant C\frac{1}{n^{\delta/2}}\frac{1}{1+|x|^{2+\delta}}.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

综合 (4.23)-(4.25), 我们有

$$|G_{m,n}(x) - \Phi(x)| \leqslant C\frac{1}{n^{\delta/2}}\frac{1}{1+|x|^{2+\delta}}.$$

因此, 由 (4.22), 我们可以得到

$$\mathbb{P}\left(Y_n + V_m \leqslant x + \alpha_n, Y_n \geqslant x\right) \leqslant J_1 + J_2 + J_3, \tag{4.26}$$

其中

$$J_1 = \iint \mathbf{1}_{\{t\leqslant\alpha_n\}} \left|\Phi\left(x - s - t + \alpha_n\right) - \Phi(x-s)\right| v_m(ds, dt),$$
$$J_2 = C\frac{1}{n^{\delta/2}} \iint \mathbf{1}_{\{t\leqslant\alpha_n\}} \frac{1}{1+|x-s|^{2+\delta}} v_m(ds, dt)$$

和

$$J_3 \quad = \quad C\frac{1}{n^{\delta/2}} \iint \mathbf{1}_{\{t\leqslant\alpha_n\}} \frac{1}{1+|x-s-t+\alpha_n|^{2+\delta}} v_m(ds, dt).$$

对于 J_1, 利用微分中值定理, 可得

$$\begin{aligned}&\mathbf{1}_{\{t\leqslant\alpha_n\}} \left|\Phi\left(x - s - t + \alpha_n\right) - \Phi(x-s)\right| \\ &\leqslant C|-t+\alpha_n| \exp\left\{-\frac{x^2}{8}\right\} + |-t+\alpha_n|\mathbf{1}_{\{|s|\geqslant 1+\frac{1}{4}|x|\}} + |-t+\alpha_n|\mathbf{1}_{\{|t|\geqslant 1+\frac{1}{4}|x|\}}.\end{aligned}$$

于是, 我们有

$$J_1 \leqslant J_{11} + J_{12} + J_{13}, \tag{4.27}$$

其中

$$J_{11} = C\iint |-t+\alpha_n| \exp\left\{-\frac{x^2}{8}\right\} v_m(ds, dt),$$
$$J_{12} = \iint |-t+\alpha_n|\mathbf{1}_{\{|s|\geqslant 1+\frac{1}{4}|x|\}} v_m(ds, dt)$$

和

$$J_{13} = \iint |-t+\alpha_n|\mathbf{1}_{\{|t|\geqslant 1+\frac{1}{4}|x|\}} v_m(ds, dt).$$

首先来看 J_{11}, 由引理 3 可得, 对任意的 $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}J_{11} \quad &\leqslant \quad C\exp\left\{-\frac{x^2}{8}\right\}\Big(\mathbb{E}|V_m| + \alpha_n\Big) \\ &\leqslant \quad C\frac{1}{n^{\delta/2}}\frac{1}{1+|x|^{2+\delta}}.\end{aligned} \tag{4.28}$$

对于 J_{12}, 令 τ, $\iota > 1$, 且满足 $\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\iota} = 1$. 利用 Hölder 不等式, 我们有以下估计: 对任意的 $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}J_{12} \quad &\leqslant \quad \iint |t|\mathbf{1}_{\{|s|\geqslant 1+\frac{1}{4}|x|\}} v_m(ds, dt) + \alpha_n \int \mathbf{1}_{\{|s|\geqslant 1+\frac{1}{4}|x|\}} v_m(ds) \\ &\leqslant \quad \left(\int |t|^\tau v_m(dt)\right)^{\frac{1}{\tau}} \left(\int \mathbf{1}_{\{|s|\geqslant 1+\frac{1}{4}|x|\}} v_m(ds)\right)^{\frac{1}{\iota}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{P}\left(|Y_m| \geqslant 1 + \frac{1}{4}|x|\right) \\ &\leqslant \quad C\frac{1}{\sqrt{n}}\left[\mathbb{P}\left(|Y_m| \geqslant 1 + \frac{1}{4}|x|\right)\right]^{\frac{1}{\iota}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{P}\left(|Y_m| \geqslant 1 + \frac{1}{4}|x|\right).\end{aligned} \tag{4.29}$$

由引理 1 知

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(|Y_m| \geqslant 1+\frac{1}{4}|x|\Big) &= \mathbb{P}\Big(Y_m \geqslant 1+\frac{1}{4}|x|\Big)+\mathbb{P}\Big(Y_m \leqslant -1-\frac{1}{4}|x|\Big) \\ &\leqslant 1-\Phi\left(\Big(1+\frac{1}{4}|x|\Big)\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}\right)+\Phi\left(-\Big(1+\frac{1}{4}|x|\Big)\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}\right) \\ &\quad +C\frac{1}{1+((1+|x|/4)\sqrt{n}/\sqrt{m})^{2+\delta}}\sum_{i=1}^{m}\mathbb{E}\left|\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{m}}\right|^{2+\delta} \\ &\leqslant C\frac{1}{n^{(1+\delta)/2}}\frac{1}{1+|x|^{2+\delta}}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

现在设 $\delta^{'}=\frac{3+2\delta}{\iota}-\delta$, 则有

$$\delta^{'}=3+\delta-\frac{3+2\delta}{\tau} \tag{4.31}$$

将 (4.30) 代入 (4.29), 即有: 对任意的 $|x|\leqslant \mu\sqrt{n}/\sigma$,

$$J_{12}\leqslant C\frac{1}{n^{\delta/2}}\frac{1}{1+|x|^{1+\delta^{'}}}. \tag{4.32}$$

下面我们再看 J_{13}. 取 $p=\frac{\delta^{'}+\delta}{2}$, 利用 Markov 不等式和引理 3, 我们可以得到, 对任意的 $|x|\leqslant\frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}$,

$$\begin{aligned} J_{13} &\leqslant \int |t|\mathbf{1}_{\{|t|\geqslant 1+\frac{1}{4}|x|\}}v_m(dt)+\int \alpha_n\mathbf{1}_{\{|t|\geqslant 1+\frac{1}{4}|x|\}}v_m(dt) \\ &\leqslant \int\frac{|t|^p}{(1+|x|/4)^p}\,|t|\,v_m(dt)+\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{P}\left(|V_m|\geqslant 1+\frac{1}{4}|x|\right) \\ &\leqslant \frac{1}{(1+|x|/4)^p}\mathbb{E}\,|V_m|^{1+p}+\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{(1+|x|/4)^{1+p}}\mathbb{E}\,|V_m|^{1+p} \\ &\leqslant C\frac{1}{n^{\delta/2}}\frac{1}{1+|x|^{1+\delta^{'}}}. \end{aligned} \tag{4.33}$$

综合 (4.27)-(4.33), 有

$$J_1\leqslant C\frac{1}{n^{\delta/2}}\frac{1}{1+|x|^{1+\delta^{'}}}. \tag{4.34}$$

值得注意的是, 对任意 $\delta^{''}\in(0,\delta^{'}]$, 我们有

$$J_1\leqslant C\frac{1}{n^{\delta/2}}\frac{1}{1+|x|^{1+\delta^{''}}}. \tag{4.35}$$

然而，由 δ' 的定义可得 $\delta^{'}\in(0,\delta)$ 的充要条件为 $\tau\in\left(\frac{3+2\delta}{3+\delta},\frac{3+2\delta}{3}\right)$. 由 (4.31) 式, $\delta^{'}$ 与 τ 呈单调递增关系，且当 $\tau=\frac{3+2\delta}{3}$ 时， $\delta^{'}$ 达到最大值 δ . 由此可见，使 (4.35) 成立的最大的 $\delta^{''}$ 为 $\delta^{'}$, 否则 $\delta^{''}$ 将超过 δ.

现在来讨论 J_2 和 J_3 的上界估计. 利用与 (4.30) 类似的推导过程, 可得, 对任意的 $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} J_2 &= C\frac{1}{n^{\delta/2}}\iint \mathbf{1}_{\{t\leqslant\alpha_n\}}\frac{1}{1+|x-s|^{2+\delta}}v_m(ds,dt) \\ &\leqslant C\frac{1}{n^{\delta/2}}\left(\int_{|s|<1+|x|/2}\frac{1}{1+|x-s|^{2+\delta}}v_m(ds)+\int_{|s|\geqslant 1+|x|/2}\frac{1}{1+|x-s|^{2+\delta}}v_m(ds)\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant C\frac{1}{n^{\delta/2}}\left[\frac{1}{1+|x/2|^{2+\delta}}+\mathbb{P}\Big(|Y_m|\geqslant 1+\frac{1}{2}|x|\Big)\right]\\
&\leqslant C\frac{1}{n^{\delta/2}}\frac{1}{1+|x|^{2+\delta}}. \qquad (4.36)
\end{aligned}
$$

对于 J_3, 利用与 (4.30) 和 (4.33) 类似的推导过程, 可得, 对任意的 $|x|\leqslant\frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}$,

$$
\begin{aligned}
J_3 &= C\frac{1}{n^{\delta/2}}\iint \mathbf{1}_{\{t\leqslant\alpha_n\}}\frac{1}{1+|x-s-t|^{2+\delta}}v_m(ds,dt)\\
&\leqslant C\frac{1}{n^{\delta/2}}\left(\iint_{|s+t|<2+|x|/2}\frac{1}{1+|x/2|^{2+\delta}}v_m(ds,dt)+\int_{|s|\geqslant 1+|x|/4}v_m(ds)+\int_{|t|\geqslant 1+|x|/4}v_m(dt)\right)\\
&\leqslant C\frac{1}{n^{\delta/2}}\left[\frac{1}{1+|x/2|^{2+\delta}}+\mathbb{P}\Big(|Y_m|\geqslant 1+\frac{1}{4}|x|\Big)+\mathbb{P}\Big(|V_m|\geqslant 1+\frac{1}{4}|x|\Big)\right]\\
&\leqslant C\frac{1}{n^{\delta/2}}\frac{1}{1+|x|^{2+\delta}}. \qquad (4.37)
\end{aligned}
$$

于是, 将 (4.34), (4.36) 和 (4.37) 代入 (4.26), 可得

$$
\mathbb{P}\left(Y_n+V_m\leqslant x+\alpha_n, Y_n\geqslant x\right)\leqslant C\frac{1}{n^{\delta/2}}\frac{1}{1+|x|^{1+\delta'}}. \qquad (4.38)
$$

最后, 由 (4.20), (4.21) 和 (4.38), 可得 (4.18) 对任意的 $|x|\leqslant\frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}$ 成立. □

4.2 定理 1 的证明

由 (2.1), 我们知道

$$
\frac{\log Z_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}=\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}+\frac{\log W_n}{\sigma\sqrt{n}}.
$$

由引理 1 和条件 **(A1)**, 我们有

$$
\left|\mathbb{P}\left(\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\leqslant x\right)-\Phi(x)\right|\leqslant C\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left|\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right|^{2+\delta}\frac{1}{(1+|x|)^{2+\delta}}\leqslant C\frac{1}{n^{\delta/2}}\frac{1}{1+|x|^{2+\delta}}. \qquad (4.39)
$$

注意到

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\leqslant x\right)\\
=\;&\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\leqslant x,\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\leqslant x\right)+\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\leqslant x,\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}> x\right)\\
=\;&\mathbb{P}\left(\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\leqslant x\right)+\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\leqslant x,\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}> x\right)-\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}> x,\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\leqslant x\right).
\end{aligned}
$$

将引理 5 应用于最后一个等式, 我们得到

$$
\left|\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\leqslant x\right)-\mathbb{P}\left(\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\leqslant x\right)\right|\leqslant C\frac{1}{n^{\delta/2}}\frac{1}{1+|x|^{1+\delta'}}. \qquad (4.40)
$$

综合 (4.39) 和 (4.40), 有

$$
\left|\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\leqslant x\right)-\Phi(x)\right| \leqslant \left|\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\leqslant x\right)-\mathbb{P}\left(\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\leqslant x\right)\right|
$$

$$+\left|\mathbb{P}\left(\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\leqslant x\right)-\Phi(x)\right|$$
$$\leqslant \quad C\frac{1}{n^{\delta/2}}\frac{1}{1+|x|^{1+\delta'}}.$$

定理 1 得证.

4.3 定理 2 的准备引理

利用与引理 3 类似的证明, 我们有下面的引理.

引理 6 假设条件 **(A3)** 和 **(A4)** 成立. 则存在正数 a_0 使得下面两个不等式成立

$$\mathbb{E}W^{-a_0}<\infty \tag{4.41}$$

和

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}W_n^{-a_0}<\infty. \tag{4.42}$$

证明 由于

$$W^{-a_0}=\frac{1}{\Gamma(a_0)}\int_0^\infty e^{-tW}t^{a_0-1}dt,$$

则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}W^{-a_0} &= \frac{1}{\Gamma(a_0)}\int_0^\infty \phi(t)t^{a_0-1}dt\\ &= \frac{1}{\Gamma(a_0)}\left(\int_0^1 \phi(t)t^{a_0-1}dt+\int_1^\infty \phi(t)t^{a_0-1}dt\right),\end{aligned} \tag{4.43}$$

其中 Γ 是伽马函数. 对于上式括号中的第一项, 由于 $0\leqslant\phi(t)\leqslant 1$ $(t>0)$, 则对任意的 $a_0>0$, 有

$$\int_0^1 \phi(t)t^{a_0-1}dt\leqslant C\int_0^1 t^{a_0-1}dt<\infty. \tag{4.44}$$

对于第二项, 我们首先需要证明存在正数 a_1, 使得对任意的 $t>0$ 有

$$\phi(t)\leqslant\frac{C}{1+t^{a_1}}. \tag{4.45}$$

接下来, 我们借鉴 Grama et al. [15] 的方法. 引入引理 2 证明中的取值为正的随机变量 $\tilde{Y}_{n,K}$. 根据 (4.5), 我们有: 对所有的 $t>0$,

$$\phi(t)\leqslant q_{n,K}\mathbb{E}\phi(\tilde{Y}_{n,K}\,t)+\mathbb{P}\Big(\frac{t}{\Pi_n}<t_K\Big). \tag{4.46}$$

设 $p\in(1,2]$. 由(4.3), 有

$$\begin{aligned}q_{n,K}\mathbb{E}\tilde{Y}_{n,K}^{-a} &= \mathbb{E}\left[\Pi_n^a\prod_{j=0}^{n-1}\left(p_1(\xi_j)+(1-p_1(\xi_j))\beta_K\right)\right]+\frac{1}{K}\mathbb{E}\Pi_n^a\\ &\quad +\frac{1}{K}\mathbb{E}\left[\Pi_n^a(\xi)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Pi_{k+1}^a(T^n\xi)}{\Pi_k^{p-1}(T^n\xi)}\left(\frac{m_k^{(p)}(T^n\xi)}{m_k^p(T^n\xi)}\right)\right].\end{aligned}$$

由于在 $\mathbb{P}$ 下, 对任意的 $k \geqslant 0$, $\Pi_n(\xi)$ 独立于 $\Pi_{k+1}(T^n\xi)$ 和 $\Pi_k(T^n\xi)$, 那么

$$
\begin{aligned}
q_{n,K}\mathbb{E}\tilde{Y}_{n,K}^{-a} &= \mathbb{E}\left[\Pi_n^a \prod_{j=0}^{n-1}(p_1(\xi_j)+(1-p_1(\xi_j))\beta_K)\right] \\
&\quad + \frac{1}{K}\mathbb{E}\Pi_n^a\,\mathbb{E}\left[1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Pi_{k+1}^a(T^n\xi)}{\Pi_k^{p-1}(T^n\xi)}\left(\frac{m_k^{(p)}(T^n\xi)}{m_k^p(T^n\xi)}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\prod_{j=0}^{n-1}\left[m_j^a(p_1(\xi_j)+(1-p_1(\xi_j))\beta_K)\right] \\
&\quad + \frac{1}{K}\mathbb{E}\Pi_n^a\,\mathbb{E}\left[1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Pi_{k+1}^a(T^n\xi)}{\Pi_k^{p-1}(T^n\xi)}\left(\frac{m_k^{(p)}(T^n\xi)}{m_k^p(T^n\xi)}\right)\right] \\
&= \left\{\mathbb{E}\left[m_0^a(p_1(\xi_0)+(1-p_1(\xi_0))\beta_K)\right]\right\}^n \\
&\quad + \frac{(\mathbb{E}m_0^a)^n}{K}\left[1+\frac{1}{1-\mathbb{E}m_0^{a-(p-1)}}\mathbb{E}\left(\frac{m_0^a m_0^{(p)}}{m_0^p}\right)\right].
\end{aligned} \tag{4.47}
$$

因此, 利用控制收敛定理和 (4.47), 可得

$$
q_{n,K}\mathbb{E}\tilde{Y}_{n,K}^{-a} \overset{a\downarrow 0}{\longrightarrow} q_{n,K} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{K}(1+C) \overset{K\to\infty}{\longrightarrow} 0.
$$

那么, 我们可以取 n_0, K_0 以及充分小的 $a_1 \in (0, \lambda_0)$ 使得 $q_{n_0,K_0}\mathbb{E}\tilde{Y}_{n_0,K_0}^{-a_1} < 1$. 再由 (4.46) 与 Markov 不等式可得

$$
\begin{aligned}
\phi(t) &\leqslant q_{n_0,K_0}\mathbb{E}\phi(\tilde{Y}_{n_0,K_0}t) + \mathbb{P}\left(\frac{t}{\Pi_{n_0}} < t_{K_0}\right) \\
&\leqslant q_{n_0,K_0}\mathbb{E}\phi(\tilde{Y}_{n_0,K_0}t) + \frac{C_{n_0,K_0}}{t^{a_1}}.
\end{aligned} \tag{4.48}
$$

注意到 $0 \leqslant \phi(t) \leqslant 1$ $(t>0)$. 最后, 由 (4.48) 以及 [17] 中的引理 4.1 可得: 对任意的 $t>0$,

$$
\phi(t) \leqslant \frac{C}{1+t^{a_1}}.
$$

则 (4.45) 得证. 下面我们取 $0 < a_0 < a_1$, 有

$$
\int_1^{\infty}\phi(t)t^{a_0-1}dt \leqslant C\int_1^{\infty}t^{a_0-a_1-1}dt < \infty. \tag{4.49}
$$

由 (4.43), (4.44) 和 (4.49) 可得 (4.41) 成立.

下面证明 (4.42). 由于函数 $x \mapsto x^{-a_0}$ $(a_0>0,\ x>0)$ 是非负凸函数. 则根据 [7] 中的引理 2.1, 我们有

$$
\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}W_n^{-a_0} = \mathbb{E}W^{-a_0} < \infty.
$$

引理 6 得证. □

下一个引理表明 Cramér 条件 **(A3)** 和 Bernstein 条件 **(A3′)** 是等价的.

引理 7 条件 **(A3)** 与下面的条件 **(A3′)** 等价.

(A3′) 存在一个常数 $H>0$, 使得对于任意的 $k \geqslant 2$,

$$
\mathbb{E}(X-\mu)^k \leqslant \frac{1}{2}k!H^{k-2}\mathbb{E}(X-\mu)^2. \tag{4.50}
$$

证明 首先证明充分性. 假设 **(A3′)** 成立, 利用泰勒展开式, 有

$$\mathbb{E}e^{\lambda_0(X-\mu)} = \mathbb{E}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda_0(X-\mu))^k}{k!}\right) = 1+\sum_{k=2}^{\infty}\mathbb{E}\frac{(\lambda_0(X-\mu))^k}{k!} \leqslant 1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2}\sigma^2\lambda_0^k H^{k-2}. \tag{4.51}$$

令 $\lambda_0=\frac{1}{2H}$, 由 (4.51), 我们得到

$$\mathbb{E}e^{\lambda_0 X} \leqslant e^{\lambda_0\mu}\left(1+\frac{\sigma^2}{4H^2}\right).$$

这就证得了 **(A3)** 成立.

下面证明必要性. 假设 **(A3)** 成立, 即 $\mathbb{E}e^{\lambda_0(X-\mu)}=: c_0<\infty$. 由不等式 $x^k\leqslant k!e^x$, 可得对任意的 $k\geqslant 3$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X-\mu)^k &= \lambda_0^{-k}\mathbb{E}[\lambda_0(X-\mu)]^k \leqslant k!\lambda_0^{-k}\mathbb{E}e^{\lambda_0(X-\mu)}\\ &= \frac{1}{2}k!\lambda_0^{-k+3}\frac{2\lambda_0^{-3}c_0}{\sigma^2}\mathbb{E}(X-\mu)^2\\ &\leqslant \frac{1}{2}k!H^{k-2}\mathbb{E}(X-\mu)^2,\end{aligned}$$

其中 $H=\max\{\lambda_0^{-1},\frac{2\lambda_0^{-3}c_0}{\sigma^2}\}$. 当 $k=2$ 时, (4.50) 显然成立. 必要性得证. □

下述引理给出了两个关于 $\log Z_n$ 的 Bernstein 型不等式.

引理 8 假设条件 **(A3)** 和 **(A4)** 成立. 则对任意的 $x\geqslant 0$, 以下不等式成立

$$\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\geqslant x\right)\leqslant 2\exp\left\{-\frac{x^2}{2\left(1+cx/\sqrt{n}\right)}\right\} \tag{4.52}$$

和

$$\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\leqslant -x\right)\leqslant C\exp\left\{-\frac{x^2}{2\left(1+cx/\sqrt{n}\right)}\right\}, \tag{4.53}$$

其中 C 是大于 1 的常数.

证明 由于 Cramér 条件 **(A3)** 和 Bernstein 条件 **(A3′)** 是等价的, 我们只需要在条件 **(A3′)** 和 **(A4)** 下证明引理 8 即可. 当 $x=0$ 时, 这两个不等式显然成立. 因此, 我们只需考虑 $x>0$ 的情况. 首先给出 (4.52) 的证明. 记

$$\eta_{n,i}=\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}},\ \ i=1,\dots,n.$$

显然有

$$\frac{\log Z_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}=\sum_{i=1}^{n}\eta_{n,i}+\frac{\log W_n}{\sigma\sqrt{n}},$$

其中 $\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_{n,i}$ 是一列独立同分布的随机变量之和. 那么对于任意的 $x>0$, 我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\geqslant x\right) &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_{n,i}+\frac{\log W_n}{\sigma\sqrt{n}}\geqslant x\right)\\ &\leqslant I_1+I_2,\end{aligned} \tag{4.54}$$

其中

$$I_1 = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_{n,i} \geqslant x - \frac{x^2}{\sigma\sqrt{n}}\right) \quad 和 \quad I_2 = \mathbb{P}\left(\frac{\log W_n}{\sigma\sqrt{n}} \geqslant \frac{x^2}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

将 Bernstein 不等式应用于 I_1, 对任意的 $x \in \left(0, \frac{\sigma\sqrt{n}}{2}\right)$, 我们有

$$I_1 \leqslant \exp\left\{-\frac{x^2\left(1-\frac{x}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2}{2\left(1+\frac{H}{\sigma\sqrt{n}}x\left(1-\frac{x}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)}\right\} \leqslant \exp\left\{-\frac{x^2}{2\left(1+cx/\sqrt{n}\right)}\right\}. \tag{4.55}$$

利用 Markov 不等式以及 $\mathbb{E}W_n = 1$, 对任意的 $x \in \left(0, \frac{\sigma\sqrt{n}}{2}\right)$, 可得

$$I_2 = \mathbb{P}\left(W_n \geqslant \exp\left\{x^2\right\}\right) \leqslant \exp\left\{-x^2\right\}\mathbb{E}W_n = \exp\left\{-x^2\right\}. \tag{4.56}$$

结合 (4.54)-(4.56), 对任意的 $x \in \left(0, \frac{\sigma\sqrt{n}}{2}\right)$, 可得 (4.52). 当 $x \geqslant \frac{\sigma\sqrt{n}}{2}$ 时, 有

$$\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \geqslant x\right) \leqslant I_3 + I_4, \tag{4.57}$$

其中

$$I_3 = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_{n,i} \geqslant \frac{x}{2}\right) \quad 和 \quad I_4 = \mathbb{P}\left(\frac{\log W_n}{\sigma\sqrt{n}} \geqslant \frac{x}{2}\right). \tag{4.58}$$

运用与 I_1 和 I_2 类似的证明方法, 对任意的 $x \geqslant \frac{\sigma\sqrt{n}}{2}$ 以及足够大的 c, 我们有

$$I_3 \leqslant \exp\left\{-\frac{(x/2)^2}{2\left(1+\frac{H}{\sigma\sqrt{n}}\frac{x}{2}\right)}\right\} \leqslant \exp\left\{-\frac{x^2}{2\left(1+cx/\sqrt{n}\right)}\right\} \tag{4.59}$$

和

$$I_4 \leqslant \exp\left\{-\frac{x\sigma\sqrt{n}}{2}\right\}\mathbb{E}W_n \leqslant \exp\left\{-\frac{x^2}{2\left(1+cx/\sqrt{n}\right)}\right\}. \tag{4.60}$$

综合 (4.57)-(4.60), 可得对任意的 $x \geqslant \frac{\sigma\sqrt{n}}{2}$, (4.52) 成立.

下面证明 (4.53). 设 a_0 是一个由引理 6 给出的正数. 那么, 对任意的 $x > 0$, 有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant -x\right) &= \mathbb{P}\left(-\sum_{i=1}^{n}\eta_{n,i} - \frac{\log W_n}{\sigma\sqrt{n}} \geqslant x\right)\\ &\leqslant I_5 + I_6,\end{aligned} \tag{4.61}$$

其中

$$I_5 = \mathbb{P}\left(-\sum_{i=1}^{n}\eta_{n,i} \geqslant x - \frac{x^2}{a_0\sigma\sqrt{n}}\right) \quad 和 \quad I_6 = \mathbb{P}\left(-\frac{\log W_n}{\sigma\sqrt{n}} \geqslant \frac{x^2}{a_0\sigma\sqrt{n}}\right).$$

然后, 我们给出 I_5 和 I_6 的上界. 利用 Bernstein 不等式, 对任意的 $x \in \left(0, \frac{a_0\sigma\sqrt{n}}{2}\right)$, 有

$$I_5 \leqslant \exp\left\{-\frac{x^2\left(1-\frac{x}{a_0\sigma\sqrt{n}}\right)^2}{2\left(1+\frac{H}{\sigma\sqrt{n}}x\left(1-\frac{x}{a_0\sigma\sqrt{n}}\right)\right)}\right\} \leqslant \exp\left\{-\frac{x^2}{2\left(1+cx/\sqrt{n}\right)}\right\}. \tag{4.62}$$

并且由 Markov 不等式和引理 6, 对任意的 $x \in \left(0, \frac{a_0\sigma\sqrt{n}}{2}\right)$, 我们有

$$I_6 = \mathbb{P}\left(\log W_n \leqslant -\frac{x^2}{a_0}\right) = \mathbb{P}\left(W_n^{-a_0} \geqslant \exp\left\{x^2\right\}\right) \leqslant \exp\{-x^2\}\mathbb{E}W_n^{-a_0} < \infty. \tag{4.63}$$

综合 (4.61)-(4.63), 对任意的 $x \in \left(0, \frac{a_0\sigma\sqrt{n}}{2}\right)$, 有 (4.53) 成立. 当 $x \geqslant \frac{a_0\sigma\sqrt{n}}{2}$ 时, 有

$$\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant -x\right) \leqslant I_7 + I_8,$$

其中

$$I_7 = \mathbb{P}\left(-\sum_{i=1}^{n}\eta_{n,i} \geqslant \frac{x}{2}\right) \quad 和 \quad I_8 = \mathbb{P}\left(-\frac{\log W_n}{\sigma\sqrt{n}} \geqslant \frac{x}{2}\right).$$

再次利用 Bernstein 不等式, 对任意的 $x \geqslant \frac{a_0\sigma\sqrt{n}}{2}$, 可得

$$I_7 \leqslant \exp\left\{-\frac{(x/2)^2}{2\left(1+\frac{H}{\sigma\sqrt{n}}\frac{x}{2}\right)}\right\} \leqslant \exp\left\{-\frac{x^2}{2\left(1+cx/\sqrt{n}\right)}\right\}. \tag{4.64}$$

利用与 I_6 类似的证明方法, 对任意的 $x \geqslant \frac{a_0\sigma\sqrt{n}}{2}$, 我们有

$$I_8 = \mathbb{P}\left(\log W_n \leqslant -\frac{\sigma\sqrt{n}x}{2}\right) \leqslant \exp\left\{-\frac{a_0\sigma\sqrt{n}x}{2}\right\}\mathbb{E}W_n^{-a_0} \leqslant C\exp\left\{-\frac{x^2}{2\left(1+cx/\sqrt{n}\right)}\right\}.$$

引理得证. □

下述引理是 Grama et al. [9] 中定理 1.3 推导出的直接结果.

引理 9 假设 **(A3)** 和 **(A4)** 成立. 则对任意的 $x \in \left[0, n^{1/4}\right]$, 以下不等式成立

$$\left|\log\frac{\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > x\right)}{1-\Phi(x)}\right| \leqslant C\frac{1+x^3}{\sqrt{n}}$$

和

$$\left|\log\frac{\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant -x\right)}{\Phi(-x)}\right| \leqslant C\frac{1+x^3}{\sqrt{n}}.$$

4.4 定理 2 的证明

当 $x \in \left[0, n^{1/4}\right]$ 时, 由引理 9 的第一个不等式, 我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x\right) - \Phi(x) &= -\left[\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > x\right) - (1-\Phi(x))\right] \\
&\geqslant -\left[(1-\Phi(x))\exp\left\{C\frac{1+x^3}{\sqrt{n}}\right\} - (1-\Phi(x))\right] \\
&= -(1-\Phi(x))\left(\exp\left\{C\frac{1+x^3}{\sqrt{n}}\right\} - 1\right).
\end{aligned} \tag{4.65}$$

利用不等式 $e^x - 1 \leqslant xe^x$, $x \geqslant 0$, 我们有

$$\exp\left\{C\frac{1+x^3}{\sqrt{n}}\right\} - 1 \leqslant C\frac{1+x^3}{\sqrt{n}}\exp\left\{C\frac{1+x^3}{\sqrt{n}}\right\}. \tag{4.66}$$

由不等式

$$\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}(1+x)} \leqslant 1-\Phi(x) \leqslant \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{\pi}(1+x)}, \quad \forall x \geqslant 0 \tag{4.67}$$

以及 (4.65) 和 (4.66), 可得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x\right) - \Phi(x) &\geqslant -\frac{C(x^2+1-x)}{\sqrt{2\pi n}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2} + C\frac{1+x^3}{\sqrt{n}}\right\} \\ &\geqslant -C\frac{1}{\sqrt{n}}(1+x^2)\exp\left\{-\frac{x^2}{2} + C\frac{x^3}{\sqrt{n}}\right\}.\end{aligned} \tag{4.68}$$

由于 $x \in [0, n^{1/4}]$, 我们有

$$1 - C\frac{x}{\sqrt{n}} = \frac{1}{1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(Cx/\sqrt{n})^k} = \frac{1}{1+Cx/\sqrt{n}(\frac{1}{1-Cx/\sqrt{n}})} \geqslant \frac{1}{1+Cx/\sqrt{n}}.$$

所以

$$\exp\left\{-\frac{x^2}{2} + C\frac{x^3}{\sqrt{n}}\right\} = \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\left(1 - C\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\} \leqslant \exp\left\{-\frac{x^2}{2(1+Cx/\sqrt{n})}\right\}. \tag{4.69}$$

将 (4.69) 应用于 (4.68), 对任意 $x \in [0, n^{1/4}]$, 有

$$\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x\right) - \Phi(x) \geqslant -C\frac{1}{\sqrt{n}}(1+x^2)\exp\left\{-\frac{x^2}{2(1+cx/\sqrt{n})}\right\}. \tag{4.70}$$

下面我们给出 $\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x\right) - \Phi(x)$ 的上界. 再次使用引理 9 的第一个不等式, 有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x\right) - \Phi(x) &= -\left[\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > x\right) - (1-\Phi(x))\right] \\ &\leqslant -\left[(1-\Phi(x))\exp\left\{-C\frac{1+x^3}{\sqrt{n}}\right\} - (1-\Phi(x))\right] \\ &= -(1-\Phi(x))\left(\exp\left\{-C\frac{1+x^3}{\sqrt{n}}\right\} - 1\right).\end{aligned} \tag{4.71}$$

由不等式 $e^x - 1 \geqslant x,\ x \leqslant 0$, 可得

$$\exp\left\{-C\frac{1+x^3}{\sqrt{n}}\right\} - 1 \geqslant -C\frac{1+x^3}{\sqrt{n}}. \tag{4.72}$$

将 (4.67) 和 (4.72) 应用于 (4.71), 有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x\right) - \Phi(x) &\leqslant \frac{C(1+x^2-x)}{\sqrt{\pi n}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} \\ &\leqslant C\frac{1}{\sqrt{n}}(1+x^2)\exp\left\{-\frac{x^2}{2(1+cx/\sqrt{n})}\right\}.\end{aligned} \tag{4.73}$$

综合 (4.70) 和 (4.73), 对任意的 $x \in [0, n^{1/4}]$, 我们得到

$$\left|\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x\right) - \Phi(x)\right| \leqslant C\frac{1}{\sqrt{n}}(1+x^2)\exp\left\{-\frac{x^2}{2(1+cx/\sqrt{n})}\right\}.$$

当 $x > n^{1/4}$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x\right) - \Phi(x)\right| &= \left|\mathbb{P}\left(\tfrac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > x\right) - (1-\Phi(x))\right| \\ &\leqslant \mathbb{P}\left(\tfrac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > x\right) + 1 - \Phi(x). \end{aligned} \tag{4.74}$$

由引理 8 的第一个不等式以及引理 7, 对任意的 $x > n^{1/4}$, 有

$$\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > x\right) \leqslant C\exp\left\{-\frac{x^2}{2(1+cx/\sqrt{n})}\right\}. \tag{4.75}$$

注意到

$$1-\Phi(x) \leqslant \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{\pi}(1+x)} \leqslant \frac{1}{1+x}\exp\left\{-\frac{x^2}{2(1+cx/\sqrt{n})}\right\}. \tag{4.76}$$

并且对任意的 $x > n^{1/4}$, 有

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(1+x^2) \geqslant 1 \quad \text{和} \quad \frac{1}{1+x} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}(1+x^2). \tag{4.77}$$

综合 (4.67) 以及 (4.74)-(4.77), 我们有

$$\left|\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x\right) - \Phi(x)\right| \leqslant C\frac{1}{\sqrt{n}}(1+x^2)\exp\left\{-\frac{x^2}{2(1+cx/\sqrt{n})}\right\}.$$

对于 $x < 0$ 的情况, 可以用类似的方法证明, 只是将 (4.67) 替换为

$$\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}(1+|x|)} \leqslant \Phi(x) \leqslant \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{\pi}(1+|x|)}, \qquad x \leqslant 0, \tag{4.78}$$

而且将引理 8 以及引理 9 中的第二个不等式分别运用于 $x \in \left[-n^{1/4}, 0\right]$ 和 $x \in \left(-\infty, -n^{1/4}\right)$ 两个情况下的证明. □

参考文献

1 Smith, W. L. and Wilkinson, W. E. (1969). On branching processes in random environments. *Ann. Math. Stat.* **40**(3), 814–827.

2 Böinghoff, C. (2014). Limit theorems for strongly and intermediately supercritical branching processes in random environment with linear fractional offspring distributions. *Stochastic Process. Appl.* **124**(11), 3553–3577.

3 Li, Y., Liu, Q., Gao, Z.Q. and Wang, H. (2014). Asymptotic properties of supercritical branching processes in random environments. *Front. Math. China* **9**, 737 – 751

4 Wang, Y. and Liu, Q. (2017). Limit theorems for a supercritical branching process with immigration in a random environment. *Sci. China Math.* **60**(12), 2481–2502.

5 Fan, X., Hu, H. and Liu, Q. (2020). Uniform Cramér moderate deviations and Berry-Esseen bounds for a supercritical branching process in a random environment. *Front. Math. China* **15**(5), 891–914.

6 Böinghoff, C and Kersting, C. (2010). Upper large deviations of branching processes in a random environment for offspring distributions with geometrically bounded tails. *Stochastic Process. Appl.* **120**(10), 2064–2077.

7 Huang, C. and Liu, Q. (2012). Moments, moderate and large deviations for a branching process in a random environment. *Stochastic Process. Appl.* (122)(2), 522–545.

8 Xu, H. (2021). Deviation inequalities for a supercritical branching process in a random environment. *J. Math. Research Appl.*, to appear. *arXiv: 2109.03489.*

9 Grama, I., Liu, Q. and Miqueu, E. (2017). Berry-Esseen bound and Cramér large deviation expansion for a supercritical branching process in a random environment. *Stochastic Process. Appl.* **127**(4), 1255–1281.
10 Gao, Z.Q. (2021). Exact convergence rate in the central limit theorem for a branching process in a random environment. *Stat. Probab. Letters* **178**: 109194.
11 Bikelis, A. (1966). On estimates of the remainder term in the central limit theorem. *Lith. Math. J.* **6**(3), 323–346.
12 Chen, L.H.Y. and Shao, Q.M. (2001). A non-uniform Berry-Esseen bound via Stein's method. *Probab. Theory Relat. Fields* **120**(2): 236-254.
13 Tanny, D. (1988). A necessary and sufficient condition for a branching process in a random environment to grow like the product of its means. *Stochastic Process. Appl.* **28**(1), 123–139.
14 Fan, X., Grama, I. and Liu. Q. (2017). Nonuniform Berry-Esseen bounds for martingales with applications to statistical estimation. *Statistics* **51**(1), 105–122.
15 Grama, I., Liu, Q. and Miqueu, E. (2021). Asymptotic of the distribution and harmonic moments for a supercritical branching process in a random environment. (hal-03416307).
16 Fan, X., Grama, I. and Liu, Q. (2017). Deviation inequalities for martingales with applications *J. Math. Anal. Appl.* **448**(1), 538–566.
17 Liu, Q. (1999). Asymptotic properties of supercritical age-dependent branching processes and homogeneous branching random walks. *Stochastic Process. Appl.* **82**(1), 61–87.
18 Liu, Q. (2001). Local dimensions of the branching measure on a Galton-Watson tree. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* **37**(2), 195–222.

Nonuniform Berry-Esseen bounds for a supercritical branching process in a random environment

Xiequan Fan & Hao Wu & Yinna Ye

Abstract Let (Z_n) be a supercritical branching process in an independent and identically distributed random environment. We establish nonuniform Berry-Esseen bounds for the process (Z_n), which refine the Berry-Esseen bound of Grama et al. [Stochastic Process. Appl., **127**(4), 1255-1281, 2017]. We also discuss an application of our result to constructing confidence interval for the criticality parameter.

Keywords Branching processes, Random environment, Nonuniform Berry-Esseen bounds

MSC(2010) 60J80, 60K37, 60F05, 62E20

doi: 10.1360/012011-XXX